Zadatak 021 (Dijana, ekonomska škola)

Odredite a za koji sustav $\begin{cases} 2x+3y=a \\ 5x-y=8 \end{cases}$ ima jednaka rješenja.

Rješenje 021

Budući da mora biti x = y, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y=a \\ 5x-y=8 \\ x=y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3x=a \\ 5x-x=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x=a \\ 4x=8 \;/:4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x=a \\ x=2 \end{array}\right\} \Rightarrow a=5\cdot 2=10.$$

Vježba 021

Odredite a za koji sustav $\begin{cases} 2x+3y=a \\ 5x-3y=8 \end{cases}$ ima jednaka rješenja.

Rezultat: 20.

Zadatak 022 (Vesele cure, studentice)

Riješite sustav jednadžbi $\begin{cases} 3x_1+x_3=6 \\ -2x_1+2x_2=2 \\ 3x_2-2x_3=0. \end{cases}$

Rješenje 022

Budući da je u prvoj jednadžbi uz nepoznanicu x_3 koeficijent 1, najlakše je izračunati tu nepoznanicu i njezinu vrijednost uvrstiti u preostale jednadžbe:

$$\begin{cases} x_3=6-3x_1 \\ -2x_1+2x_2=2 \\ 3x_2-2x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1+2x_2=2 \\ 3x_2-2\cdot(6-3x_1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1+2x_2=2 \\ 3x_2-12+6x_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1+2x_2=2 \\ 6x_1+3x_2=12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -2x_1+2x_2=2 \;/:(-2) \\ 6x_1+3x_2=12 \;/:3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1-x_2=-1 \\ 2x_1+x_2=4 \end{cases} \Rightarrow 3x_1=3 \;/:3 \Rightarrow x_1=1.$$

Iz jednadžbe $2x_1 + x_2 = 4$ dobije se x_2:

$$2\cdot 1+x_2=4 \Rightarrow 2+x_2=4 \Rightarrow x_2=2.$$

Vrijednost nepoznanice x_3 iznosi:

$$x_3=6-3\cdot x_1=6-3\cdot 1=6-3=3.$$

Rješenje sustava je uređena trojka:

$$(x_1, x_2, x_3)=(1, 2, 3).$$

Vježba 022

Riješite sustav jednadžbi $\begin{cases} 2x_1-3x_2=3 \\ x_1+4x_3=10 \\ x_2+2x_3=5. \end{cases}$

Rezultat: $(x_1, x_2, x_3)=(6, 3, 1).$

Zadatak 023 (Malena, gimnazija)

U ovisnosti o parametru $m\in R$ diskutiraj rješenje sustava:

$$\begin{cases} (m+1)\cdot x+3\cdot y=3 \\ x+(m-1)\cdot y=1. \end{cases}$$

Rješenje 023

$$\begin{cases}(m+1)\cdot x+3\cdot y=3\\ x+(m-1)\cdot y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}(m+1)\cdot x+3\cdot y=3\ /\cdot(m-1)\\ x+(m-1)\cdot y=1\ /\cdot(-3)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(m-1)\cdot(m+1)\cdot x+3\cdot(m-1)\cdot y=3\cdot(m-1)\\ -3\cdot x-3\cdot(m-1)\cdot y=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(m^2-1\right)\cdot x+3\cdot(m-1)\cdot y=3\cdot(m-1)\\ -3\cdot x-3\cdot(m-1)\cdot y=-3\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{zbrojimo}\\ \text{jednadžbe}\end{bmatrix}\Rightarrow\left(m^2-1\right)\cdot x-3\cdot x=3\cdot(m-1)-3\Rightarrow\left(m^2-1-3\right)\cdot x=3\cdot m-3-3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(m^2-4\right)\cdot x=3\cdot m-6\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{uvjet}\\ m^2-4\neq 0\\ m_{1,2}\neq\pm 2\end{bmatrix}\Rightarrow\left(m^2-4\right)\cdot x=3\cdot m-6\ /\cdot\frac{1}{m^2-4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{3\cdot m-6}{m^2-4}=\frac{3\cdot(m-2)}{(m-2)\cdot(m+2)}=\frac{3}{m+2}.$$

Tražimo nepoznanicu y:

$$\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{m+2}\\ x+(m-1)\cdot y=1\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{3}{m+2}+(m-1)\cdot y=1\ /\cdot(m+2)\Rightarrow 3+(m+2)\cdot(m-1)\cdot y=m+2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(m+2)\cdot(m-1)\cdot y=m+2-3\Rightarrow(m+2)\cdot(m-1)\cdot y=m-1\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{uvjet}\\ m+2\neq 0\ ,\ m-1\neq 0\\ m\neq -2\quad ,\ m\neq 1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(m+2)\cdot(m-1)\cdot y=m-1\ /\cdot\frac{1}{(m+2)\cdot(m-1)}\Rightarrow y=\frac{m-1}{(m+2)\cdot(m-1)}=\frac{1}{m+2}.$$

Vježba 023

U ovisnosti o parametru $m\in R$ diskutiraj rješenje sustava:

$$\begin{cases}m\cdot x+y=1\\ x-y=1.\end{cases}$$

Rezultat:

$$\begin{cases}x=\dfrac{2}{m+1},\ m\neq -1\\ y=\dfrac{1-m}{m+1},\ m\neq -1.\end{cases}$$

Zadatak 024 (Goga, ekonomska škola)

Znamo da je 40% broja A za 3 veće od 30% broja B i da je 60% broja A za 3 manje od 50% broja B. Koliki je broj B?

Rješenje 024

Zapišimo rečenicu "… je 40% broja A za 3 veće od 30% broja B …" pomoću jednadžbe:

$$\frac{40}{100}\cdot A=\frac{30}{100}\cdot B+3.$$

Zapišimo rečenicu "… je 60% broja A za 3 manje od 50% broja B …" pomoću jednadžbe:

$$\frac{60}{100}\cdot A=\frac{50}{100}\cdot B-3.$$

Broj B dobijemo iz sustava jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{40}{100}\cdot A=\frac{30}{100}\cdot B+3\\ \frac{60}{100}\cdot A=\frac{50}{100}\cdot B-3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{4}{10}\cdot A-\frac{3}{10}\cdot B=3\ /\cdot 30\\ \frac{6}{10}\cdot A-\frac{5}{10}\cdot B=-3\ /\cdot(-20)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}12\cdot A-9\cdot B=90\\ -12\cdot A+10\cdot B=60\end{array}\right\}\Rightarrow B=150.$$

Vježba 024

Znamo da je 40% broja A za 3 veće od 30% broja B i da je 60% broja A za 3 manje od 50% broja B. Koliki je broj A?

Rezultat: 120.

Zadatak 025 (Martina, Vesna, hotelijerska škola)

Riješi nejednadžbu : $(x+1)\cdot(x+2)>0.$

Rješenje 025

Profesor: "Djevojke, kada je umnožak dvaju faktora pozitivan broj?"
Martina i Vesna s osmijesima na licima: "Umnožak dvaju faktora je pozitivan ako su:

- oba faktora pozitivna (veća od nule)

$$a>0 \text{ i } b>0 \Rightarrow a\cdot b>0$$

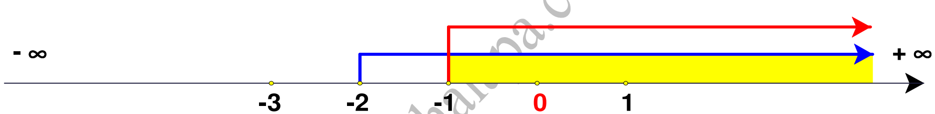
- oba faktora negativna (manja od nule)

$$a<0 \text{ i } b<0 \Rightarrow a\cdot b>0.$$

Zato je:

I. Pretpostavimo da su oba faktora pozitivna:

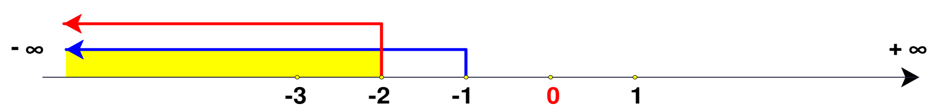
$$\left.\begin{array}{l}x+1>0\\ x+2>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x>-1\\ x>-2\end{array}\right\}\Rightarrow x>-1.$$



$$x\in\langle -1,+\infty\rangle.$$

II. Pretpostavimo da su oba faktora negativna:

$$\left.\begin{array}{l}x+1<0\\ x+2<0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x<-1\\ x<-2\end{array}\right\}\Rightarrow x<-2.$$



$$x\in\langle -\infty,-2\rangle.$$

Konačno je rješenje:

$$x\in\langle -\infty,-2\rangle\cup\langle -1,+\infty\rangle.$$

Vježba 025

Riješi nejednadžbu : $(x+1)\cdot(x+3)>0.$

Rezultat: $x\in\langle -\infty,-3\rangle\cup\langle -1,+\infty\rangle.$

Zadatak 026 (Vesna, Martina, hotelijerska škola)

Riješi nejednadžbu : $(x+1)\cdot(x+2)<0.$

Rješenje 026

Profesor: "Djevojke, kada je umnožak dvaju faktora negativan broj?"

Vesna i Martina opet s osmijesima na licima: "Umnožak dvaju faktora je negativan ako je:

- prvi faktor pozitivan (veći od nule), a drugi faktor negativan (manji od nule)

$$a>0 \text{ i } b<0 \Rightarrow a\cdot b<0$$

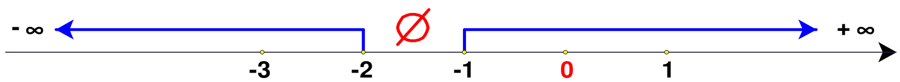
- prvi faktor negativan (manji od nule), a drugi faktor pozitivan (veći od nule)

$$a<0 \text{ i } b>0 \Rightarrow a \cdot b<0.$$

Zato je:

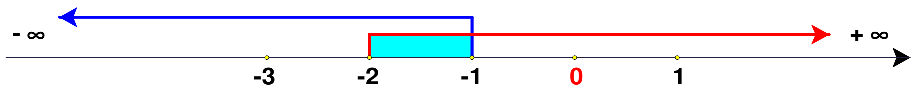
I. Pretpostavimo da je prvi faktor pozitivan, a drugi faktor negativan:

$$\left.\begin{array}{l} x+1>0 \\ x+2<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x>-1 \\ x<-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \varnothing.$$



II. Pretpostavimo da je prvi faktor negativan, a drugi faktor pozitivan:

$$\left.\begin{array}{l} x+1<0 \\ x+2>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x<-1 \\ x>-2 \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \langle -2, -1 \rangle.$$



$$x \in \langle -2, -1 \rangle.$$

Konačno je rješenje:

$$x \in \langle -2, -1 \rangle \cup \varnothing = \langle -2, -1 \rangle.$$

Vježba 026

Riješi nejednadžbu: $(x+1) \cdot (x+3)<0.$

Rezultat: $x \in \langle -3, -1 \rangle.$

Zadatak 027 (1A, hotelijerska škola)

Riješi nejednadžbu: $\dfrac{2 \cdot x+3}{x-1} \le 1.$

Rješenje 027

Zadanu nejednadžbu ne smijemo pomnožiti nazivnikom x – 1. Zašto? Zato jer je:

- za x < 1 nazivnik negativan broj
- za x = 1 nazivnik jednak 0
- za x > 1 nazivnik pozitivan broj.

Jasno je da to različito utječe na rezultat množenja. Zato ćemo najprije zadanu nejednadžbu napisati u obliku

$$\frac{2 \cdot x+3}{x-1}-1 \le 0,$$

a zatim srediti njezinu lijevu stranu:

$$\frac{2 \cdot x+3}{x-1} \le 1 \Rightarrow \frac{2 \cdot x+3}{x-1}-1 \le 0 \Rightarrow \frac{2 \cdot x+3-(x-1)}{x-1} \le 0 \Rightarrow \frac{2 \cdot x+3-x+1}{x-1} \le 0 \Rightarrow \frac{x+4}{x-1} \le 0.$$

Zadanu nejednadžbu sveli smo na oblik u kojem je lijeva strana razlomak, a desna broj 0.

Razlomak $\dfrac{x+4}{x-1}$ poprimit će vrijednosti manje ili jednake 0 ako je:

- brojnik manji ili jednak 0, a nazivnik veći od 0
- brojnik veći ili jednak 0, a nazivnik manji od 0.

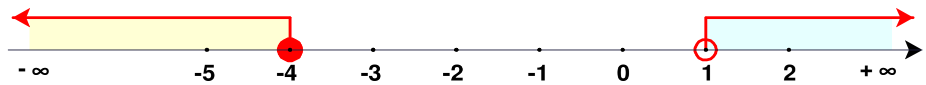
Ponovimo!

$$\frac{\text{brojnik}}{\text{nazivnik}} \le 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{brojnik} \le 0 \ , \ \text{nazivnik}>0 \\ \text{brojnik} \ge 0 \ , \ \text{nazivnik}<0 \end{array}\right\}.$$

Zadana nejednadžba transformira se ("raspada") na dva sustava linearnih nejednadžbi:

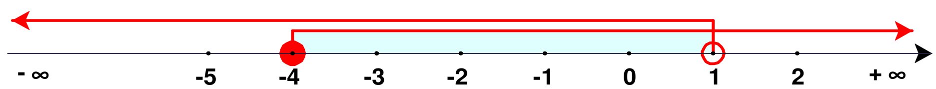
- $$\frac{x+4}{x-1} \le 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+4 \le 0 \\ x-1 > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x \le -4 \\ x > 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x \in \langle -\infty, -4] \\ x \in \langle 1, +\infty \rangle \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{skup rješenja} \\ \text{je presjek} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_1 = \langle -\infty, -4] \cap \langle 1, +\infty \rangle = \varnothing.$$



- $$\frac{x+4}{x-1} \le 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+4 \ge 0 \\ x-1 < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x \ge -4 \\ x < 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x \in [-4, +\infty \rangle \\ x \in \langle -\infty, 1 \rangle \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{skup rješenja} \\ \text{je presjek} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_2 = \langle -\infty, 1 \rangle \cap [-4, +\infty \rangle = [-4, 1 \rangle.$$



Rješenja zadanog problema zadovoljavaju bar jedan od dobivenih sustava nejednadžbi, pa je stoga skup S unija skupova S_1 i S_2:

$$S = S_1 \cup S_2 = \varnothing \cup [-4, 1 \rangle = [-4, 1 \rangle.$$

Vježba 027

Riješi nejednadžbu : $\frac{x-2}{x+5} \le 0.$

Rezultat: $x \in \langle -5, 2].$

Zadatak 028 (1A, hotelijerska škola)

Riješite jednadžbu : $2 \cdot x^3 - 7 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 2 = 0.$

Rješenje 028

Ponovimo!

$$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right) \quad , \quad a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0$$

Kubna jednadžba pripada takozvanim recipročnim jednadžbama pa se pogodnim grupiranjem rastavi na faktore:

$$2 \cdot x^3 - 7 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 2 = 0 \Rightarrow 2 \cdot x^3 - 2 - 7 \cdot x^2 + 7 \cdot x = 0 \Rightarrow 2 \cdot \left(x^3 - 1\right) - 7 \cdot x \cdot (x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot (x-1) \cdot \left(x^2 + x + 1\right) - 7 \cdot x \cdot (x-1) = 0 \Rightarrow (x-1) \cdot \left[2 \cdot \left(x^2 + x + 1\right) - 7 \cdot x\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1) \cdot \left[2 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 2 - 7 \cdot x\right] = 0 \Rightarrow (x-1) \cdot \left[2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 2\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x - 1 = 0 \\ 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_{2,3} = \frac{5 \pm 3}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_1 = 1 \ , \ x_2 = 2 \ , \ x_3 = \frac{1}{2}.$$

Vježba 028

Riješite jednadžbu: $4 \cdot x^3 - 14 \cdot x^2 + 14 \cdot x - 4 = 0.$

Rezultat: $x_1 = 1 \ , \ x_2 = 2 \ , \ x_3 = \frac{1}{2}.$

Zadatak 029 (Anamarijina sestra, studentica)

Riješite sustav jednadžbi: $\begin{cases} 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 = 0 \\ 2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_3 = -2 \\ x_2 + 3 \cdot x_3 = 6. \end{cases}$

Rješenje 029

Iz treće jednadžbe izračunamo x_2 i uvrstimo u prve dvije jednadžbe. Na taj način dobije se sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice x_1 i x_3:

$$\left.\begin{matrix} 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 = 0 \\ 2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_3 = -2 \\ x_2 + 3 \cdot x_3 = 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 = 0 \\ 2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_3 = -2 \\ x_2 = 6 - 3 \cdot x_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3 \cdot x_1 - 2 \cdot \left(6 - 3 \cdot x_3\right) = 0 \\ 2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_3 = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3 \cdot x_1 - 12 + 6 \cdot x_3 = 0 \\ 2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_3 = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_3 = 12 \\ 2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_3 = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_3 = 12 \ /:3 \\ 2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_3 = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 + 2 \cdot x_3 = 4 \\ 2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_3 = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot x_1 = 2 \ /:3 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 + 2 \cdot x_3 = 4 \\ x_1 = \frac{2}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{2}{3} + 2 \cdot x_3 = 4 \Rightarrow 2 \cdot x_3 = 4 - \frac{2}{3} \Rightarrow 2 \cdot x_3 = \frac{10}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x_3 = \frac{10}{3} \ / \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x_3 = \frac{5}{3} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_2 + 3 \cdot x_3 = 6 \\ x_3 = \frac{5}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_2 + 3 \cdot \frac{5}{3} = 6 \Rightarrow x_2 + 5 = 6 \Rightarrow x_2 = 1.$$

Rješenje sustava glasi: $\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{3}\right).$

Vježba 029

Riješite sustav jednadžbi: $\begin{cases} 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 = 0 \\ 2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_3 = 2 \\ x_2 + 3 \cdot x_3 = 6. \end{cases}$

Rezultat: $\left(x_1, x_2, x_3\right) = (2, 3, 1).$

Zadatak 030 (Ivana, hotelijerska škola)

Koliko rješenja ima sustav linearnih jednadžbi $\begin{cases} x + y = 2 + \lambda \\ -x + \lambda \cdot y = -1 \end{cases}$ ovisno o parametru $\lambda \in R$?

Rješenje 030

$$\left.\begin{matrix} x + y = 2 + \lambda \\ -x + \lambda \cdot y = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{bmatrix} \Rightarrow y + \lambda \cdot y = 2 + \lambda - 1 \Rightarrow (1 + \lambda) \cdot y = 1 + \lambda.$$

1.slučaj

$$\left.\begin{matrix} \lambda = -1 \\ (1 + \lambda) \cdot y = 1 + \lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow (1 - 1) \cdot y = 1 - 1 \Rightarrow 0 \cdot y = 0 \Rightarrow \text{ima beskonačno mnogo rješenja.}$$

2.slučaj

$$\left.\begin{matrix} \lambda \neq -1 \\ (1 + \lambda) \cdot y = 1 + \lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow (1 + \lambda) \cdot y = 1 + \lambda \ / \cdot \frac{1}{1 + \lambda} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \text{ima jedno rješenje.}$$

Vježba 030

Koliko rješenja ima sustav linearnih jednadžbi $\begin{cases} x + y = 3 + \lambda \\ -x + \lambda \cdot y = -2 \end{cases}$ ovisno o parametru $\lambda \in R$?

Rezultat: Za $\lambda = -1$ ima beskonačno mnogo rješenja, a za $\lambda \neq -1$ ima jedno rješenje.

Zadatak 031 (Cecilija, gimnazija)

Nađite sva rješenja jednadžbe x · (y + 1) = 10 u skupu cijelih brojeva Z. Rješenja ispišite kao uređene parove (x, y).

Rješenje 031

Uočimo da se broj 10 može rastaviti na faktore, u skupu cijelih brojeva Z, na sljedeći način:

Broj	Faktori	
10	$-1 \cdot (-10) = 10$	$1 \cdot 10 = 10$
	$-2 \cdot (-5) = 10$	$2 \cdot 5 = 10$
	$-5 \cdot (-2) = 10$	$5 \cdot 2 = 10$
	$-10 \cdot (-1) = 10$	$10 \cdot 1 = 10$

Rezultate dobijemo rješavanjem sustava jednadžbi:

- $\left.\begin{array}{l} x \cdot (y+1) = 10 \\ -1 \cdot (-10) = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -1 \\ y + 1 = -10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -11 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_1, y_1) = (-1, -11),$
- $\left.\begin{array}{l} x \cdot (y+1) = 10 \\ -2 \cdot (-5) = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -2 \\ y + 1 = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -2 \\ y = -6 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_2, y_2) = (-2, -6),$
- $\left.\begin{array}{l} x \cdot (y+1) = 10 \\ -5 \cdot (-2) = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -5 \\ y + 1 = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -5 \\ y = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_3, y_3) = (-5, -3),$
- $\left.\begin{array}{l} x \cdot (y+1) = 10 \\ -10 \cdot (-1) = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -10 \\ y + 1 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -10 \\ y = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_4, y_4) = (-10, -2),$
- $\left.\begin{array}{l} x \cdot (y+1) = 10 \\ 1 \cdot 10 = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y + 1 = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_5, y_5) = (1, 9),$
- $\left.\begin{array}{l} x \cdot (y+1) = 10 \\ 2 \cdot 5 = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y + 1 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_6, y_6) = (2, 4),$
- $\left.\begin{array}{l} x \cdot (y+1) = 10 \\ 5 \cdot 2 = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 5 \\ y + 1 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_7, y_7) = (5, 1),$
- $\left.\begin{array}{l} x \cdot (y+1) = 10 \\ 10 \cdot 1 = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 10 \\ y + 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 10 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_8, y_8) = (10, 0).$

Vježba 031

Nađite sva rješenja jednadžbe x · (y + 1) = 10 u skupu prirodnih brojeva N. Rješenja ispišite kao uređene parove (x, y).

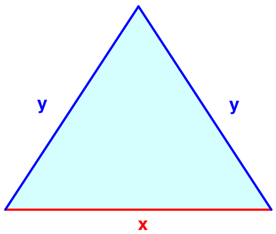
Rezultat: $(x_1, y_1) = (1, 9), \quad (x_2, y_2) = (2, 4), \quad (x_3, y_3) = (5, 1), \quad (x_4, y_4) = (10, 0).$

Zadatak 032 (Megy, gimnazija)

U jednakokračnom trokutu opsega 128 mm, osnovica i krak se odnose kao 10 : 11. Kolike su duljine osnovice i krakova trokuta?

Rješenje 032

1.inačica



$$\left.\begin{matrix} x+2\cdot y=128 \\ x:y=10:11 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=128-2\cdot y \\ 11\cdot x=10\cdot y \end{matrix}\right\} \Rightarrow 11\cdot(128-2\cdot y)=10\cdot y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1408-22\cdot y=10\cdot y \Rightarrow 1408=32\cdot y \Rightarrow 32\cdot y=1408 \;/:32 \Rightarrow y=44 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x=128-2\cdot y \\ y=44 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=128-2\cdot 44 \Rightarrow x=128-88 \Rightarrow x=40.$$

Duljina osnovice je 40 mm, a kraka 44 mm.

2.inačica

$$\left.\begin{matrix} x+2\cdot y=128 \\ x:y=10:11 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2\cdot y=128 \\ x=10\cdot k \;,\; y=11\cdot k \end{matrix}\right\} \Rightarrow 10\cdot k+2\cdot 11\cdot k=128 \Rightarrow 10\cdot k+22\cdot k=128 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 32\cdot k=128 \;/:32 \Rightarrow k=4 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=10\cdot 4 \\ y=11\cdot 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=40 \\ y=44 \end{matrix}\right\}.$$

Duljina osnovice je 40 mm, a kraka 44 mm.

Vježba 032

U jednakokračnom trokutu opsega 22 cm, osnovica i krak se odnose kao 3 : 4. Kolike su duljine osnovice i krakova trokuta?

Rezultat: 6 cm i 8 cm.

Zadatak 033 (Megy, gimnazija)

Za koji a brojevi x, y zadovoljavaju sustav x + 7 · y = a, 2 · x – y = 5 i uvjet x > y – 2?

Rješenje 033

Najprije riješimo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{matrix} x+7\cdot y=a \\ 2\cdot x-y=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+7\cdot y=a \\ 2\cdot x-y=5 \;/\cdot 7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+7\cdot y=a \\ 14\cdot x-7\cdot y=35 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15\cdot x=a+35 \;/:15 \Rightarrow x=\frac{a+35}{15}.$$

$$\left.\begin{matrix} x+7\cdot y=a \\ 2\cdot x-y=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+7\cdot y=a \;/\cdot(-2) \\ 2\cdot x-y=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -2\cdot x-14\cdot y=-2\cdot a \\ 2\cdot x-y=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -15\cdot y=5-2\cdot a \;/:(-15) \Rightarrow y=\frac{2\cdot a-5}{15}.$$

Vrijednost za a dobijemo iz uvjeta:

$$x>y-2 \Rightarrow \frac{a+35}{15}>\frac{2\cdot a-5}{15}-2 \;/\cdot 15 \Rightarrow a+35>2\cdot a-5-30 \Rightarrow a-2\cdot a>-5-30-35 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a>-70 \;/\cdot(-1) \Rightarrow a<70 \Rightarrow a\in\langle -\infty, 70\rangle.$$

Vježba 033

Za koji a brojevi x, y zadovoljavaju sustav x + 7 · y = a, 2 · x – y = 5 i uvjet x < y – 2?

Rezultat: $a\in\langle 70, +\infty\rangle.$

Zadatak 034 (Megy, gimnazija)

Za koji realni broj a sustav jednadžbi nema rješenja: – x + 3 · y = 1 , 2 · x + a · y = 1?

Rješenje 034

Odredimo nepoznanicu y (jer se uz nju nalazi koeficijent a) metodom suprotnih koeficijenata:

$$\left.\begin{array}{l} -x+3\cdot y=1 \\ 2\cdot x+a\cdot y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x+3\cdot y=1 \;/\cdot 2 \\ 2\cdot x+a\cdot y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2\cdot x+6\cdot y=2 \\ 2\cdot x+a\cdot y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cdot y+a\cdot y=3 \Rightarrow y\cdot(6+a)=3 \Rightarrow y=\frac{3}{6+a}.$$

Budući da nazivnik ne smije biti jednak nuli, slijedi:

$$6+a\neq 0 \Rightarrow a\neq -6.$$

Sustav jednadžbi nema rješenja za a = – 6.

Vježba 034

Za koji realni broj a sustav jednadžbi nema rješenja: – x + 2 · y = 1 , 2 · x + a · y = 1?

Rezultat: Sustav jednadžbi nema rješenja za a = – 4.

Zadatak 035 (Ivan, pomorska škola)

Nađite skup svih rješenja nejednadžbe $\frac{-3}{2\cdot x+3}\geq 0.$

Rješenje 035

Ponovimo!

Razlomak $\frac{a}{b}$ je pozitivan ako su brojnik i nazivnik pozitivni ili ako su brojnik i nazivnik negativni:

$$\frac{a}{b}>0 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} a>0 \\ b>0 \end{array}\right\} \text{ ili } \left.\begin{array}{l} a<0 \\ b<0 \end{array}\right\}.$$

Budući da je brojnik negativan (– 3 < 0), slijedi da i nazivnik mora biti negativan:

$$2\cdot x+3<0 \Rightarrow 2\cdot x<-3 \;/:2 \Rightarrow x<-\frac{3}{2} \Rightarrow x\in\left\langle -\infty, -\frac{3}{2}\right\rangle.$$

Vježba 035

Nađite skup svih rješenja nejednadžbe $\frac{-2}{2\cdot x+3}\geq 0.$

Rezultat: $x\in\left\langle -\infty, -\frac{3}{2}\right\rangle.$

Zadatak 036 (Anamarija, maturantica TUPŠ-a)

Neka je u + v = 5, a u · v = 1. Koliko je $u^2 + v^2$?

Rješenje 036

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

1.inačica

Riješimo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} u+v=5 \\ u\cdot v=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{iz prve jednadžbe izračunamo v} \\ \text{(ili u) i uvrstimo u drugu jednadžbu} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v=5-u \\ u\cdot v=1 \end{array}\right\} \Rightarrow u\cdot(5-u)=1 \Rightarrow 5\cdot u-u^2=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -u^2+5\cdot u-1=0 \;/\cdot(-1) \Rightarrow u^2-5\cdot u+1=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1 \;,\; b=-5 \;,\; c=1 \\ u_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow u_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-4}}{2} \Rightarrow u_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_1=\frac{5+\sqrt{21}}{2} \\ u_2=\frac{5-\sqrt{21}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow [v=5-u] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_1=5-u_1 \\ v_2=5-u_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} v_1 = 5 - \frac{5+\sqrt{21}}{2} \\ v_2 = 5 - \frac{5-\sqrt{21}}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} v_1 = \frac{10-5-\sqrt{21}}{2} \\ v_2 = \frac{10-5+\sqrt{21}}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} v_1 = \frac{5-\sqrt{21}}{2} \\ v_2 = \frac{5+\sqrt{21}}{2} \end{matrix}\right\}.$$

Rješenja sustava su:

$$\left(u_1, v_1\right) = \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}, \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right) \quad , \quad \left(u_2, v_2\right) = \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}, \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right).$$

Budući da su rješenja sustava simetrična, uzet ćemo, na primjer, rješenje

$$\left(u, v\right) = \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}, \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right).$$

Tada je:

$$u^2 + v^2 = \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^2 = \frac{25+10\cdot\sqrt{21}+21}{4} + \frac{25-10\cdot\sqrt{21}+21}{4} =$$

$$= \frac{25+10\cdot\sqrt{21}+21+25-10\cdot\sqrt{21}+21}{4} = \frac{92}{4} = 23.$$

2.inačica

$$\left.\begin{matrix} u+v=5 \\ u\cdot v=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{kvadriramo prvu} \\ \text{jednadžbu} \end{matrix}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} u+v=5 \ /^2 \\ u\cdot v=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} u^2+2\cdot u\cdot v+v^2=25 \\ u\cdot v=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow u^2+2\cdot 1+v^2=25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u^2+2+v^2=25 \Rightarrow u^2+v^2=25-2 \Rightarrow u^2+v^2=23.$$

Vježba 036

Neka je u + v = 5, a u · v = 2. Koliko je $u^2 + v^2$?

Rezultat: 21.

Zadatak 037 (Nena, studentica)

Uporabom Cramerova pravila riješi sustav jednadžbi: $\begin{cases} 3\cdot x - y + 2\cdot z = 7 \\ 4\cdot x - 3\cdot y + 2\cdot z = 4 \\ 2\cdot x + y + 3\cdot z = 13. \end{cases}$

Rješenje 037

Ponovimo!

Sarussovo pravilo

Sarussovo pravilo može se primijeniti samo na izračunavanje determinanti trećeg reda (to su determinante koje imaju tri retka i tri stupca). Pravilo se sastoji u sljedećem:
prvi i drugi stupac determinante se pripišu determinanti s desne strane te se od zbroja umnožaka glavno dijagonalnih elemenata oduzme zbroj umnožaka sporedno dijagonalnih elemenata.

Cramerovo pravilo

Sustav jednadžbi

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 = b_2 \\ a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 = b_3 \end{cases}$$

ima jedinstveno rješenje onda i samo onda, ako je matrica koeficijenata (matrica sustava)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

regularna, tj. det A ≠ 0 (det A zove se determinanta matrice A).
Rješenje sustava je dano sa

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad , \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \quad , \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

gdje je D = det A, pri čemu pretpostavljamo da je D ≠ 0.

D_1 je determinanta matrice A dobivena tako da se prvi stupac od A, a_{11}, a_{21}, a_{31} zamijeni stupcem b_1, b_2, b_3.

D_2 je determinanta matrice A dobivena tako da se drugi stupac od A, a_{12}, a_{22}, a_{32} zamijeni stupcem b_1, b_2, b_3.

D_3 je determinanta matrice A dobivena tako da se treći stupac od A, a_{13}, a_{23}, a_{33} zamijeni stupcem b_1, b_2, b_3.

Formule

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad , \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \quad , \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

zovu se Cramerovo pravilo za rješavanje linearnog sustava od 3 jednadžbe sa 3 nepoznanice.
Brojevi a_{ij} (i, j = 1, 2, 3) nazivaju se koeficijenti, a brojevi b_i (i = 1, 2, 3) slobodni članovi sustava.

Računamo determinantu D:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Sarussovo} \\ \text{pravilo} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{matrix} =$$

$$= \left(3\cdot(-3)\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 4\cdot 1\right) - \left(2\cdot(-3)\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 3 + 3\cdot 4\cdot(-1)\right) = (-27-4+8) - (-12+6-12) =$$

$$= -23 - (-18) = -23 + 18 = -5.$$

Računamo determinantu D_1:

$$D_1 = \begin{bmatrix} \text{umjesto koeficijenata uz } x \text{ 3, 4, 2} \\ \text{stavimo slobodne članove 7, 4, 13} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 13 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Sarussovo} \\ \text{pravilo} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 13 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 7 & -1 \\ 4 & -3 \\ 13 & 1 \end{matrix} =$$

$$= \left(7\cdot(-3)\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 13 + 2\cdot 4\cdot 1\right) - \left(13\cdot(-3)\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot(-1)\right) = (-63-26+8) - (-78+14-12) =$$

$$= -81 - (-76) = -81 + 76 = -5.$$

Računamo determinantu D_2:

$$D_2 = \begin{bmatrix} \text{umjesto koeficijenata uz } y \ -1, -3, 1 \\ \text{stavimo slobodne članove 7, 4, 13} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 13 & 3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Sarussovo} \\ \text{pravilo} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 13 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 7 \\ 4 & 4 \\ 2 & 13 \end{matrix} =$$

$$= (3\cdot 4\cdot 3 + 7\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 4\cdot 13) - (2\cdot 4\cdot 2 + 13\cdot 2\cdot 3 + 3\cdot 4\cdot 7) = (36+28+104) - (16+78+84) =$$

$$= 168 - 178 = -10.$$

Računamo determinantu D_3:

$$D_3 = \begin{bmatrix} \text{umjesto koeficijenata uza } z \text{ 2, 2, 3} \\ \text{stavimo slobodne članove 7, 4, 13} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 4 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 13 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Sarussovo} \\ \text{pravilo} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 4 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 13 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{matrix} =$$

$$= \left(3\cdot(-3)\cdot 13 - 1\cdot 4\cdot 2 + 7\cdot 4\cdot 1\right) - \left(2\cdot(-3)\cdot 7 + 1\cdot 4\cdot 3 + 13\cdot 4\cdot(-1)\right) = (-117-8+28) - (-42+12-52) =$$

$$= -97 - (-82) = -97 + 82 = -15.$$

Rješenje sustava iznosi:

$$\left.\begin{matrix} D_1 = -5 \ , \ D = -5 \\ x_1 = \dfrac{D_1}{D} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_1 = \frac{-5}{-5} \Rightarrow x_1 = 1,$$

$$\left.\begin{array}{l} D_2 = -10 \;,\; D = -5 \\ x_2 = \frac{D_2}{D} \end{array}\right\} \Rightarrow x_2 = \frac{-10}{-5} \Rightarrow x_2 = 2,$$

$$\left.\begin{array}{l} D_3 = -15 \;,\; D = -5 \\ x_3 = \frac{D_3}{D} \end{array}\right\} \Rightarrow x_3 = \frac{-15}{-5} \Rightarrow x_3 = 3.$$

$$\left(x_1, x_2, x_3\right) = (1, 2, 3).$$

ježba 037

Uporabom Cramerova pravila riješi sustav jednadžbi: $\begin{cases} 3 \cdot x - y + 2 \cdot z = 4 \\ 4 \cdot x - 3 \cdot y + 2 \cdot z = 3 \\ 2 \cdot x + y + 3 \cdot z = 6. \end{cases}$

Rezultat: (1, 1, 1)

Zadatak 038 (Tiny, gimnazija)

Zbrajanjem po dva od tri broja a, b i c dobijemo brojeve 3, 6, 19. Odredi brojeve a, b, c.

Rješenje 038

1.inačica

Zbog uvjeta zadatka možemo zapisati sljedeće jednadžbe:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 3 \\ b + c = 6 \\ a + c = 19 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow a + b + b + c + a + c = 3 + 6 + 19 \Rightarrow 2 \cdot a + 2 \cdot b + 2 \cdot c = 28 \;/:2 \Rightarrow a + b + c = 14.$$

Računamo nepoznanicu c:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 3 \\ a + b + c = 14 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 + c = 14 \Rightarrow c = 14 - 3 \Rightarrow c = 11.$$

Dalje slijedi (računamo nepoznanice a i b):

$$\left.\begin{array}{l} b + c = 6 \\ a + c = 19 \\ c = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b + 11 = 6 \\ a + 11 = 19 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = 6 - 11 \\ a = 19 - 11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = -5 \\ a = 8 \end{array}\right\}.$$

2.inačica

Zbrojimo, na primjer, prve dvije jednadžbe.

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 3 \\ b + c = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow a + b + b + c = 3 + 6 \Rightarrow a + 2 \cdot b + c = 9.$$

Računamo nepoznanicu b:

$$\left.\begin{array}{l} a + c = 19 \\ a + 2 \cdot b + c = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a + c = 19 \\ a + c + 2 \cdot b = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow 19 + 2 \cdot b = 9 \Rightarrow 2 \cdot b = 9 - 19 \Rightarrow 2 \cdot b = -10 \;/:2 \Rightarrow b = -5.$$

Dalje slijedi (računamo nepoznanice a i c):

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 3 \\ b + c = 6 \\ b = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a - 5 = 3 \\ -5 + c = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 3 + 5 \\ c = 6 + 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 8 \\ c = 11 \end{array}\right\}.$$

3.inačica

Iz, na primjer, prve jednadžbe izračunamo nepoznanicu b i uvrstimo je u drugu jednadžbu.

$$\left.\begin{array}{l}a+b=3\\ b+c=6\\ a+c=19\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}b=3-a\\ b+c=6\\ a+c=19\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}3-a+c=6\\ a+c=19\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-a+c=6-3\\ a+c=19\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-a+c=3\\ a+c=19\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{array}\right] \Rightarrow 2\cdot c=22\ /:2 \Rightarrow c=11.$$

Dalje slijedi (računamo nepoznanice b i a):

$$\left.\begin{array}{l}b+c=6\\ a+c=19\\ c=11\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}b+11=6\\ a+11=19\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}b=6-11\\ a=19-11\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}b=-5\\ a=8\end{array}\right\}.$$

Vježba 038

Zbrajanjem po dva od tri broja a, b i c dobijemo brojeve 3, 4, 5. Odredi brojeve a, b, c.

Rezultat: a = 1, b = 2, c = 3.

Zadatak 039 (Harry, gimnazija)

Broj 750 podijeli na dva dijela tako da 8% jednoga dijela zajedno sa 24% drugoga čini 11.2% od danog broja.

Rješenje 039

Označimo slovima x i y prvi dio, odnosno drugi dio broja 750. Budući da 8% prvoga dijela zajedno sa 24% drugog dijela čini 11.2% od danog broja, pišemo sljedeći sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l}x+y=750\\ \frac{8}{100}\cdot x+\frac{24}{100}\cdot y=\frac{11.2}{100}\cdot 750\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+y=750\\ \frac{8}{100}\cdot x+\frac{24}{100}\cdot y=\frac{11.2}{100}\cdot 750\ /\cdot 100\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+y=750\\ 8\cdot x+24\cdot y=11.2\cdot 750\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+y=750\\ 8\cdot x+24\cdot y=8400\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+y=750\ /\cdot(-8)\\ 8\cdot x+24\cdot y=8400\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-8\cdot x-8\cdot y=-6000\\ 8\cdot x+24\cdot y=8400\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\cdot y=2400\ /:16 \Rightarrow y=150 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}y=150\\ x+y=750\end{array}\right\} \Rightarrow x+150=750 \Rightarrow x=750-150 \Rightarrow x=600.$$

Prvi dio je 600, a drugi dio 150.

Vježba 039

Broj 750 podijeli na dva dijela tako da 16% jednoga dijela zajedno sa 48% drugoga čini 22.4% od danog broja.

Rezultat: Prvi dio je 600, a drugi dio 150.

Zadatak 040 (Alma, gimnazija)

Riješi sustav nejednadžbi: $\left\{\begin{array}{l}1.2\cdot x-\frac{3\cdot x-2}{2}<0.1\\ \frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{3}>1\end{array}\right.$.

Rješenje 040

Ponovimo!

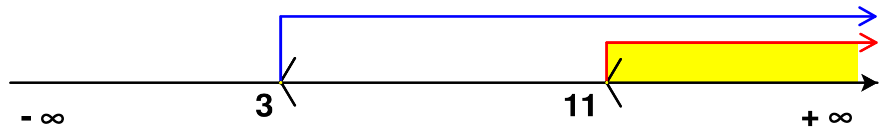
$$x>a \Rightarrow x\in\langle a,+\infty\rangle.$$

Transformiramo sustav nejednadžbi i pritom svaku nejednadžbu riješimo zasebice:

$$\left.\begin{array}{l}1.2\cdot x-\frac{3\cdot x-2}{2}<0.1\\ \frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{3}>1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}1.2\cdot x-\frac{3\cdot x-2}{2}<0.1\ /\cdot 10\\ \frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{3}>1\ /\cdot 6\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}12\cdot x-5\cdot(3\cdot x-2)<1\\ 3\cdot(x-1)-2\cdot(x+1)>6\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 12 \cdot x - 15 \cdot x + 10 < 1 \\ 3 \cdot x - 3 - 2 \cdot x - 2 > 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 12 \cdot x - 15 \cdot x < 1 - 10 \\ 3 \cdot x - 2 \cdot x > 6 + 3 + 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -3 \cdot x < -9 \;/ : (-3) \\ x > 11 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x > 3 \\ x > 11 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{presjek} \\ \text{skupova} \end{matrix}\right] \Rightarrow x > 11 \Rightarrow x \in \langle 11, +\infty \rangle .$$



Vježba 040

Riješi sustav nejednadžbi: $\begin{cases} 1.2 \cdot x - \frac{3}{2} \cdot x < -0.9 \\ \frac{x+1}{3} + \frac{1-x}{2} < -1 \end{cases}$.

Rezultat: x > 11.